Алгебра логики.
Логические высказывания.

Задание 1: Просмотреть презентацию и сделать по ней конспект.
Задание 2: Решить самостоятельную работу в тетради. Самостоятельная работа в конце презентации.

Логическое высказывание -

это повествовательное предложение, относительно которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

Так, например, предложение **"6 — четное число"**

следует считать высказыванием, и оно истинное.

Предложение **"Рим — столица Франции"** тоже высказывание, и оно ложное.

Высказывание не может быть

выражено повелительным или вопросительным предложением, оценка истинности или ложности которых невозможна.
выражаться с помощью математических, физических, химических и прочих знаков.

Высказывания могут

выражаться с помощью математических, физических, химических и прочих знаков.

Не всякое предложение является логическим высказыванием

Например, предложения

- «*Ученик десятого класса*»

- **«*Информатика — интересный предмет*»**

высказываниями не являются

Первое предложение ничего не утверждает об ученике, а второе использует слишком неопределённое понятие "*интересный предмет*". Вопросительные и восклицательные предложения также не являются высказываниями, поскольку говорить об их истинности или ложности не имеет смысла.

Высказывательная форма

- Предложения типа "*В городе А более миллиона жителей*", "*У него голубые глаза*" не являются высказываниями, так как для выяснения их истинности или ложности нужны дополнительные сведения: о каком конкретно городе или человеке идет речь. Такие предложения называются **высказывательными формами**.

- **Высказывательная форма** — это повествовательное предложение, которое прямо или косвенно содержит хотя бы одну переменную и становится высказыванием, когда все переменные замещаются своими значениями.

- Алгебра логики рассматривает любое высказывание только с одной точки зрения — является ли оно истинным или ложным. Заметим, что зачастую трудно установить истинность высказывания. Так, например, высказывание *"Площадь поверхности Индийского океана равна 75 млн кв. км"* в одной ситуации можно посчитать ложным, а в другой — истинным. Ложным — так как указанное значение неточное и вообще не является постоянным. Истинным — если рассматривать его как некоторое приближение, приемлемое на практике.

Логическая форма

- Высказывания имеют определенную логическую форму. Понятие о предмете мысли называется *субъектом* и обозначается буквой ***S***, а понятие о свойствах и отношениях предмета мысли называется *предикатом* и обозначается буквой ***P***. Оба эти понятия - субъект и предикат называются *терминами* суждения. Отношения между субъектом и предикатом выражается *связ кой* «**есть**», «**не есть**», «**является**», «**состоит**» и т.д.
- Таким образом, каждое высказывание состоит из трех элементов - *субъекта*, *предиката* и *связки* (двух терминов и связки). Состав суждения можно выразить общей формулой «***S*** **есть** ***P***» или «***S*** **не есть** ***P***».

Логические связки

Употребляемые в обычной речи слова и словосочетания "**не**", "**и**", "**или**", "**если . . . , то**", "**тогда и только тогда**" и другие позволяют из уже заданных высказываний строить новые высказывания.

Высказывания, образованные из других высказываний с помощью логических связок, называются **составными**. Высказывания, не являющиеся составными, называются **элементарными (простыми)**.

Так, например,

- из элементарных высказываний "*Петров — врач*", "*Петров — шахматист*" при помощи связки "**и**" можно получить составное высказывание "*Петров — врач и шахматист*", понимаемое как "*Петров — врач, хорошо играющий в шахматы*".

- При помощи связки "***или***" из этих же высказываний можно получить составное высказывание "*Петров — врач или шахматист*", понимаемое в алгебре логики как "*Петров или врач, или шахматист, или и врач и шахматист одновременно*".

- Истинность или ложность получаемых таким образом составных высказываний зависит от истинности или ложности элементарных высказываний.

- Чтобы обращаться к логическим высказываниям, им назначают имена. Пусть через **А** обозначено высказывание *"Тимур поедет летом на море",* а через **В** — высказывание *"Тимур летом отправится в горы".* Тогда составное высказывание *"Тимур летом побывает и на море, и в горах"* можно кратко записать как **А и В**. Здесь "**и**" — логическая связка, **А**, **В** — логические переменные, которые могут принимать только два значения — "**истина**" или "**ложь**", обозначаемые, соответственно, "**1**" и "**0**".

- Каждая логическая связка рассматривается как операция над логическими высказываниями и имеет свое название и обозначение: **отрицание**, **конъюнкция**, **дизъюнкция**, **импликация**, **эквивалентность**.

- Если составное высказывание выразить в виде формулы, в которую войдут логические переменные и знаки логических операций, то получится логическое выражение, значение которого можно вычислить.

- Значением логического выражения могут быть только **ЛОЖЬ** или **ИСТИНА**.

Логическое отрицание (инверсия)

- Логическая связка **ИНВЕРСИЯ** (от лат. *inversion* - переворачиваю).
- Название – **отрицание**.
- Обозначение:
- в алгебре высказываний **A** или **¬A**,
- в языках программирования обозначение **Not**.

В естественном языке ему соответствует выражение "**неверно, что . . .**", относящееся ко всему высказыванию, или присоединение союза "**не**" к некоторой части простого высказывания.

Например, высказывание "*Число 10 – четное*"= ИСТИНА, отрицанием его является высказывание "*Число 10 – нечетное*"= ЛОЖЬ.

Или высказывание "*Число 10 - отрицательное*" = ЛОЖЬ, его отрицание "*Неверно, что число 10 - отрицательное*" = ИСТИНА.

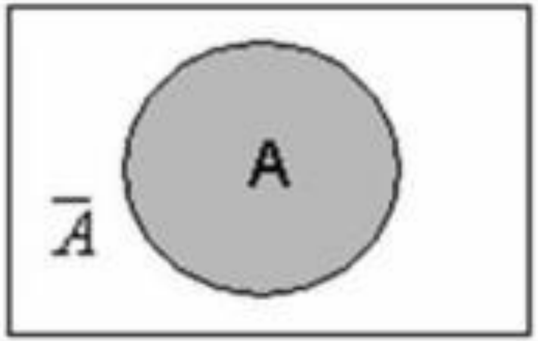
Отрицанию соответствует следующая таблица истинности:

A	¬A
1	0
0	1

Вывод: результат будет ложным, если исходное выражение истинно, и наоборот.

Дополнение до универсального множества

- В алгебре множеств логическому отрицанию соответствует операция *дополнения до универсального множества*, т.е. множеству получившемуся в результате отрицания множества ***A*** соответствует множество $\overline{A}$, дополняющее его до универсального множества.



Логическое умножение (конъюнкция)

Логическая связка **КОНЪЮНКЦИЯ** (от лат. *conjunctio* - связываю).

Название – **логическое умножение**.

Обозначение:

- в алгебре высказываний **A&B** или **A^B**,
- в языках программирования **And.**

В естественном языке ему соответствует союз "**и**".

Например, из двух простых высказываний А="*На улице светит солнце*" и В="*На улице ясная погода*" построим сложное, используя союз-связку "**и**".

Получим "*На улице светит солнце* и *ясная погода*".

Конъюнкции соответствует следующая таблица истинности:

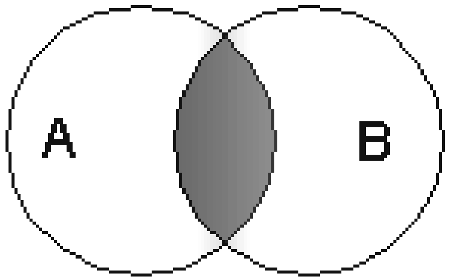
Высказывание	**A**	**B**	**A&B**
На улице не светит солнце и пасмурная погода	0	0	0
На улице не светит солнце и ясная погода	0	1	0
На улице светит солнце и пасмурная погода	1	0	0
На улице светит солнце и ясная погода	**1**	**1**	**1**

Вывод: <u>результат будет истинным тогда и только тогда,</u>

<u>когда оба исходных высказывания истинны</u>

<u>и ложным в остальных случаях</u>.

В алгебре множеств конъюнкции соответствует операция *пересечения множеств*, т.е. множеству получившемуся в результате умножения множеств **А** и **В** соответствует множество, состоящее из элементов, принадлежащих одновременно двум множествам.



Логическое сложение (дизъюнкция)

Логическая связка **ДИЗЪЮНКЦИЯ** (от лат. disjunctio - различаю).

Название – **логическое сложение**.

Обозначение:

в алгебре высказываний **AvB**,

в языках программирования **Or.**

В естественном языке ему соответствует союз "**или**".

Например, из двух простых высказываний А="*На улице светит солнце*" и В="*На улице пасмурная погода*" построим сложное, используя союз-связку "**или**".

Получим "*На улице светит солнце* или *пасмурная погода*".

Дизъюнкции соответствует следующая таблица истинности:

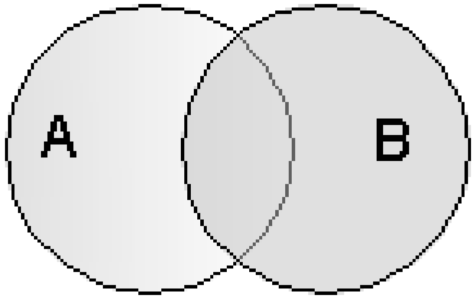
Высказывание	A	B	**Av B**
На улице не светит солнце или ясная погода	**0**	**0**	**0**
На улице не светит солнце или пасмурная погода	0	1	1
На улице светит солнце или ясная погода	1	0	1
На улице светит солнце или пасмурная погода	1	1	1

Вывод: результат будет ложным тогда и только тогда,

когда оба исходных высказывания ложны

и истинным в остальных случаях.

В алгебре множеств дизъюнкции соответствует операция *объединения множеств*, т.е. множеству получившемуся в результате сложения множеств **А** и **В** соответствует множество, состоящее из элементов, принадлежащих либо множеству **А**, либо множеству **В**.



Логическое следование (импликация)

Логическая связка **ИМПЛИКАЦИЯ** (от лат. *implicatio* – тесно связывать).

Название – **логическое следование**.

Обозначение в алгебре высказываний: **A=>B**, где **A** – условие, **B** – следствие.

В естественном языке ему соответствует оборот "**если . . ., то . . .**".

Например, из двух простых высказываний A="*На улице светит солнце*" и B="*На улице ясная погода*" построим сложное, используя оборот-связку "**если..., то...**".

Получим "*Если светит солнце,* то *на улице ясная погода*".

Импликации соответствует следующая таблица истинности:

Высказывание	A	B	**A=>B**
Если не светит солнце, то *на улице пасмурная погода*	0	0	1
Если не светит солнце, то *на улице ясная погода*	0	1	1
Если светит солнце, то *на улице пасмурная погода*	**1**	**0**	**0**
Если светит солнце, то *на улице ясная погода*	1	1	1

Вывод: результат будет ложным тогда и только тогда, когда из истинного основания (А) следует ложное следствие (В).

Логическое равенство (эквивалентность)

Логическая связка **ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ** (от лат. *aequivalens* – равноценное).

Название – **логическое равенство**.

Обозначение в алгебре высказываний: **A<=>B**.

В естественном языке ему соответствует оборот "**... тогда и только тогда, когда ...**".

Например, из двух простых высказываний A="*На улице ясная погода*" и B="*На улице светит солнце*" построим сложное, используя оборот-связку "**...тогда и только тогда, когда...**". Получим "*На улице ясная погода* тогда и только тогда, когда *светит солнце*".

Эквивалентности соответствует следующая таблица истинности:

Высказывание	A	B	**A<=>B**
На улице пасмурная погода тогда и только тогда, когда *не светит солнце*	**0**	**0**	**1**
На улице пасмурная погода тогда и только тогда, когда *светит солнце*	0	1	0
На улице ясная погода тогда и только тогда, когда не *светит солнце*	1	0	0
На улице ясная погода тогда и только тогда, когда *светит солнце*	**1**	**1**	**1**

Вывод: <u>результат будет истинным тогда и только тогда, когда оба высказывания одновременно либо ложны, либо истинны.</u>

Логические выражения, правила составления логических выражений

- **Логическая переменная** – это простое высказывание, содержащее только одну мысль. Ее символическое обозначение – латинская буква (например, A, B, X, Y и т.д.). Значением логической переменной могут быть только константы ИСТИНА (**1**) и ЛОЖЬ (**0**). На основании простых высказываний могут быть построены **составные высказывания**.
- **Логическая функция** - составное высказывание, которое содержит несколько простых мыслей, соединенных между собой с помощью логических операций.

Ее символическое обозначение – **F (A, B, …)**.

- **Логические операции** – логическое действие.

Составление таблиц истинности для логических высказываний нескольких переменных

- Решение логических выражений принято записывать в виде **<u>таблиц истинности</u>** – таблиц, в которых по действиям показано, какие значения принимает логическое выражение при всех возможных наборах его переменных.
- При составлении таблицы истинности для логического выражения необходимо учитывать **<u>порядок выполнения логических операций</u>**, а именно:
    - действия в скобках,
    - инверсия (**отрицание**),
    - & (**конъюнкция**),
    - v (**дизъюнкция**),
    - => (**импликация**),
    - <=> (**эквивалентность**).

Алгоритм составления таблицы истинности:

1. Выяснить количество строк в таблице (вычисляется как 2^n, где n – количество переменных + строка заголовков столбцов).
2. Выяснить количество столбцов (вычисляется как количество переменных + количество логических операций).
3. Установить последовательность выполнения логических операций.
4. Построить таблицу, указывая названия столбцов и возможные наборы значений исходных логических переменных.
5. Заполнить таблицу истинности по столбцам.
6. Записать ответ.

Построим таблицу истинности для выражения F=(AvB)&(¬Av¬B).

1. Количество строк=2^2 (2 переменных+строка заголовков столбцов)=5.

2. Количество столбцов=2 логические переменные (A, B)+ 5 логических операций (v,&,¬,v,¬) = 7.

3. Расставим порядок выполнения операций: 1 5 2 4 3

(A v B) & (¬A v ¬B)

4-5. Построим таблицу и заполним ее по столбцам:

A	B	AvB	¬A	¬B	¬Av¬B	(AvB)&(¬Av¬B)
0	**0**	0	1	1	1	**0**
0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	**1**	1	0	0	0	**0**

6. Ответ: F=0, при A=B=0 и A=B=1

Обратите внимание

Наборы входных переменных, во избежание ошибок, рекомендуется перечислять следующим образом:

а) разделить колонку значений первой переменной пополам и заполнить верхнюю часть колонки нулями, а нижнюю единицами;

б) разделить колонку значений второй переменной на четыре части и заполнить каждую четверть чередующимися группами нулей и единиц , начиная с группы нулей;

в) продолжать деление колонок значений последующих переменных на 8, 16 и т.д. частей и заполнение их группами нулей или единиц до тех пор, пока группы нулей и единиц не будут состоять из одного символа.

Тавтология - **тождественно истинная формула**, или формула принимающая значение "**истина**" ("**1**") при любых входящих в нее значениях переменных.

Противоречие - **тождественно ложная формула**, или формула принимающая значение "**ложь**" ("**0**") при любых входящих в нее значениях переменных.

Равносильные формулы - две формулы **А** и **В** принимающие одинаковые значения, при одинаковых наборах значений входящих в них переменных. Равносильность двух формул алгебры логики обозначается символом $\Leftrightarrow$

Самостоятельная работа
по теме «Таблицы истинности»

1. Определите, для какой операции представлена таблица истинности:

0	0	1	а) конъюнкция
0	1	0	б) дизъюнкция
1	0	0	в) импликация
1	1	1	г) эквивалентность
			д) инверсия

2. Для какой операции, высказывание, является истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания истинны.

а) конъюнкция
б) дизъюнкция
в) импликация
г) эквивалентность
д) инверсия

3. Для высказывания ¬(B∨A) построили таблицу истинности, выберите верную.

а)	0	0	1	0	б)	0	0	0	1	в)	1	0	0	1
	0	1	1	0		1	0	0	1		0	0	1	0
	1	0	0	1		0	1	0	1		0	1	1	0
	1	1	1	0		1	1	1	0		1	1	1	0

4. Постройте таблицу истинности:

а) F = ¬(B→A)
б) F = A → (¬ B ∨ A ∧ B).